

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die für die vorliegende Arbeit benötigten theoretischen Grundlagen zusammengefasst. Dazu gehören die Grundlagen der Mechanik wie die Definitionen von Spannung, Verzerrung und Materialgesetz. Für eine detaillierte Darstellung siehe Haupt [74], Hiermaier [75] oder Holzapfel [78]. Des Weiteren werden die Grundlagen für die Beschreibung anisotroper Werkstoffe sowie das Verhalten von Werkstoffen unter dynamischer Last und hohem Druck diskutiert. Untersuchungen und Methoden zum ballistischen Verhalten von Werkstoffen können unter anderem in Rosenberg und Dekel [135], Carlucci [29], Zukas [172] sowie Benson [17] und Anderson [2] gefunden werden.

Skalare Parameter werden im Folgenden als einfache Buchstaben geschrieben. Vektoren erhalten einen Vektorpfeil. Zweistufige Tensoren werden in fester Schreibweise dargestellt. Der vierstufige Elastizitätstensor erhält zusätzlich zur fetten Schreibweise einen Unterstrich.

2.1 Spannungen, Verzerrungen und Konstitutivgesetz

Zur Bewertung des Belastungsgrades eines Werkstoffs in einem materiellen Punkt ergibt sich der Spannungstensor σ an diesem Punkt zu

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Durch bilden des Momentengleichgewichts am Einheitselement kann gezeigt werden, dass der Spannungstensor σ symmetrisch ist.

Mit Hilfe des Theorems nach Cayley [30] und Hamilton [72] lässt sich die charakteristische Gleichung des Spannungstensors σ schreiben als

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (2.2)$$

Darin sind die Parameter σ die Eigenwerte des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und I_i dessen drei Invarianten. Sie sind unabhängig vom Koordinatensystem. Die erste Invariante I_1 entspricht der Summe der Diagonalelemente, also

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}. \quad (2.3)$$

Der Druck entspricht dabei dem negativen Mittelwert der Diagonalelemente mit

$$p = -\frac{1}{3}I_1. \quad (2.4)$$

Wie später noch gezeigt wird, lässt sich der Spannungstensor aufspalten in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil. Vom deviatorischen Anteil lassen sich die Invarianten ebenfalls mit Hilfe der charakteristischen Gleichung identifizieren. Sie werden mit J_i bezeichnet.

Die zweite deviatorische Invariante ist die am häufigsten verwendete Invariante, sie ist definiert als

$$J_2 = -\frac{1}{2}(s_{11}s_{11} + 2s_{12}s_{12} + 2s_{13}s_{13} + s_{22}s_{22} + 2s_{23}s_{23} + s_{33}s_{33}). \quad (2.5)$$

Darin sind die Parameter s_{ij} die Komponenten des deviatorischen Anteils des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$.

Mit Hilfe der zweiten deviatorischen Invariante definierte von Mises [102], [103] die Vergleichsspannung als

$$\sigma_{vM} = \sqrt{3J_2} \quad (2.6)$$

welche nach ihm benannt wurde. Sie stellt für kubische Kristalle ein skalares Maß dar, welches zur Bewertung von mehrachsigen Spannungszuständen geeignet ist.

Die Verzerrungen eines Körpers werden damit noch nicht beschrieben. Dazu wird der Verschiebungsgradient \boldsymbol{H} mit

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} - \mathbf{1} \quad (2.7)$$

definiert. Dieser entspricht dem Deformationsgradient \boldsymbol{F} abzüglich dem Einheitstensor $\mathbf{1}$. Der Deformationsgradient \boldsymbol{F} setzt sich dabei zusammen aus der Streckung und der Drehung eines materiellen Punktes eines Körpers bezogen auf seinen Ausgangszustand. Der Einheitstensor $\mathbf{1}$ beinhaltet nur die Werte 1 auf der Diagonalen und die Nebendiagonalelemente sind identisch Null.

Aus dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten werden verschiedene Verzerrungsmaße gebildet. Das Green-Lagrange Verzerrungsmaß \mathbf{E} [62] [63] eignet sich für große Deformationen und ist definiert als

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}). \quad (2.8)$$

Ein hochgestelltes T meint darin die Transponierte, also einen an seiner Diagonalen gespiegelten Tensor.

Zur Beschreibung kleiner Deformationen ist das linearisierte Verzerrungsmaß $\boldsymbol{\varepsilon}$ ausreichend mit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (2.9)$$

beschrieben. Im Bereich kleiner Deformationen entspricht es dem Verzerrungsmaß nach Green-Lagrange \mathbf{E} .

Diese Gleichungen reichen nicht aus, um ein elastisches oder plastisches Werkstoffverhalten unter quasistatischer oder dynamischer Belastung zu beschreiben. Dazu ist ein Konstitutivgesetz notwendig. Dieses verknüpft die Spannungen mit den Verzerrungen abhängig vom Werkstoffverhalten. Für das Konstitutivgesetz sind Ansätze notwendig, welche sich eignen, das im Versuch ermittelte und beobachtete Werkstoffverhalten zu beschreiben. Diese Ansätze können entwickelt werden für elastisches und plastisches Materialverhalten, Schädigung und Versagen, quasistatische und dynamische Beanspruchung sowie thermische Lasten. Auch richtungsabhängige Ansätze zur Beschreibung anisotroper Werkstoffe sowie Homogenisierungsansätze zur Beschreibung inhomogener Werkstoffe sind verbreitet.

Das nach Hooke [79] benannte Konstitutivgesetz lautet

$$\boldsymbol{\sigma} = \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Es stellt die Verbindung zwischen den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ her. Dazu verwendet Hooke einen vierstufigen Tensor, den Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$. Dabei geht Hooke davon aus, dass die auf den Körper einwirkenden Beanspruchungen eine dazu proportionale Verformung hervorrufen. Das Gesetz ist für viele Werkstoffe unter kleinen Deformationen gültig. Für plastisches Fließen oder hyperelastisches Materialverhalten sind jedoch andere Ansätze notwendig.

Der vierstufige Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$ besitzt unter Berücksichtigung der Symmetrie 21 voneinander unabhängige Parameter. Damit kann vollständig anisotropes Materialverhalten beschrieben werden. Im Rahmen der Arbeit werden ausschließlich Werkstoffe mit mindestens orthotroper Symmetrie verwendet. Unter Verwendung der Notation nach Voigt [162]

kann die orthotrope Form des vierstufigen Elastizitätstensors als symmetrische, quadratische Matrix \mathbf{C} geschrieben werden als

$$\mathbf{C}^{\text{ortho}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Werkstoffe ohne richtungsabhängiges Verhalten werden als isotrop bezeichnet. Für isotropes Verhalten reduzieren sich die 9 Parameter auf nur noch zwei Parameter entsprechend den Gleichungen

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.12)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.13)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}). \quad (2.14)$$

Darin sind der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν die bekannten Ingenieurkonstanten.

Unter Einschränkung von kleinen Deformationen und elastischen Materialverhaltens kann eine lineare Theorie entwickelt werden, siehe dazu Becker [16] und Greve [64]. Abhängig vom gewählten Verzerrungsmaß ergibt sich ein thermodynamisch konsistentes Spannungsmaß, siehe dazu Macvean [91].

Um den Spannungszustand genauer zu beschreiben, wird das Maß der Mehrachsigkeit verwendet. Die Mehrachsigkeit κ ist definiert als

$$\kappa = -\frac{p}{\sigma_{\text{VM}}}. \quad (2.15)$$

Die folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der Frage, wie sich ein Material unter hohem Druck verhält. Dazu wird der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ in zwei Anteile zerlegt: einen An-

teil, der den hydrostatischen Druck beschreibt und einen zweiten, den vom hydrostatischen Druck verschiedenen Anteil, der sogenannte deviatorische Anteil $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{1}$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} & s_{23} \\ \text{sym.} & & s_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ & -p & 0 \\ \text{sym.} & & -p \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{mit} \quad p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\text{und} \quad J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0$$

Unter hohem Druck sind die deviatorischen Elemente vernachlässigbar klein. Der Schubwiderstand des Werkstoffs ist gegenüber seinem Kompressionswiderstand um Größenordnungen kleiner. Die gleiche Zerlegung kann für den Verzerrungsratentensor $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + 1/3\dot{\epsilon}_v\mathbf{1}$ angewendet werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \text{sym.} & & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \text{sym.} & & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_v & 0 & 0 \\ & \dot{\epsilon}_v & 0 \\ \text{sym.} & & \dot{\epsilon}_v \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\text{mit} \quad \dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = \frac{\dot{V}}{V}$$

Die Verzerrungsraten sind dabei als Zeitinkrement dargestellt. Anschaulich zeigt sich der volumetrische Anteil als Widerstand gegen eine Formänderung, während sich der deviatorische Anteil gegen eine Gestaltänderung richtet. Dies wird auch erkennbar, wenn die Beziehungen für ein isotropes, hypoelastisches Material geschrieben werden. Das deviatorische Spannungsinkrement \mathbf{s} folgt dabei mit

$$\mathbf{s} = 2G\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.18)$$

aus dem deviatorischen Verzerrungsrateninkrement $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, während der skalare Wert der Druckrate \dot{p} aus dem volumetrischen Anteil des Verzerrungsinkrements $\dot{\epsilon}_v$ folgt

$$\dot{p} = -K\dot{\epsilon}_v. \quad (2.19)$$

Gegen die deviatorische Verzerrung richtet sich der zweifache Schubmodul G , während der Kompressionsmodul K gegen eine volumetrische Verzerrung arbeitet. Die elastischen

Konstanten Schubmodul G und Kompressionsmodul K können jeweils aus den Ingenieurkonstanten Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν mit

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.20)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.21)$$

errechnet werden.

Durch Zeitintegration der Gleichungen kann der Zustand des Werkstoffs im Elastischen eindeutig beschrieben werden.

Wird diese Zerlegung für ein elasto-plastisches Material angewendet, so zeigen sich vier Anteile. Der Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ kann in einen elastischen Anteil und in einen plastischen Anteil zerlegt werden, wobei jeder dieser Anteile wiederum in seinen deviatorischen und seinen volumetrischen Anteil zerlegt werden kann. Die volumetrischen Anteile sind dabei ausschließlich auf der Hauptdiagonalen besetzt.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.22)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p \quad (2.23)$$

Für ein elasto-plastisches Werkstoffverhalten ergeben sich die deviatorischen und hydrostatischen Spannungsanteile zu

$$\dot{\mathbf{s}} = 2G(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (2.24)$$

$$\dot{p} = -K(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p). \quad (2.25)$$

Die hochgestellten Indizes e und p kennzeichnen darin entsprechend elastische oder plastische Anteile.

Der Druck errechnet sich durch Integration entsprechend

$$\dot{p} = -K\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^e = -K\left(\frac{\dot{V}}{V}\right) \quad (2.26)$$

$$p = -K \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -K \ln(\det \mathbf{F}) = -K \ln(\varepsilon_v + 1) = -K \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right). \quad (2.27)$$

Um die Werkstoffparameter des Materialgesetzes zu ermitteln, werden Versuche durchgeführt. Diese sind so definiert, dass ein bestimmter Beanspruchungszustand im Werkstoff auftritt. Eine Standard-Konfiguration ist der uniaxiale Zugversuch. Dort tritt ein uniaxialer Spannungszustand im Werkstoff auf. Die Lastaufbringung erfolgt in axialer Richtung der Zugprobe, die Ränder in lateraler Richtung sind frei und können sich verformen. Es

treten keine Spannungen quer zur Belastungsrichtung auf und die freien Ränder lassen eine Querdehnung des Werkstoffs zu. Der Zugversuch wird zur Basis-Charakterisierung von Werkstoffen verwendet. Mit den daraus gewonnenen Daten lassen sich Belastungen an quasistatisch oder dynamisch beanspruchten Bauteilen gut beschreiben.

Ein weiterer Versuch zur Charakterisierung von Werkstoffen ist der Planar-Platten Impakt Test (PPI-Test, Flyer-Plate-Test). Der Versuchsaufbau wird in Hiermaier [75] und Rohr et al. [134] beschrieben und wird in Abbildung 2.1 gezeigt. Dort tritt ein uniaxialer Dehnungszustand und hohe hydrostatische Drücke im Werkstoff auf. Dieser Zustand entspricht der Situation eines Werkstoffs unter lokaler Impaktbelastung.

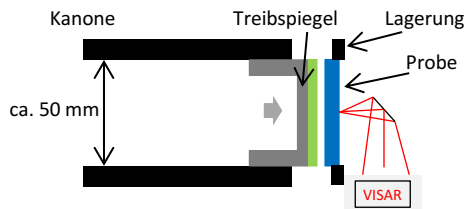


Abbildung 2.1 Konfiguration des Planar-Platten Impakt Tests.

Bei einem PPI-Test werden zwei planare Scheiben mit einer Geschwindigkeit von mehreren hundert bis tausend Metern pro Sekunde aufeinander geschossen. Die Ränder der Platten sind fest eingespannt oder im Verhältnis zur Plattendicke weit entfernt, sodass im Zentrum der Platten keine quer zur Beanspruchungsrichtung orientierte Dehnungen auftreten. Eine der beiden Platten wird dazu in einer Leichtgaskanone über ein Sabot (Treibspiegel) beschleunigt und stellt die Belastung dar, die andere Platte bestehend aus dem zu untersuchenden Werkstoff ist vor der Mündung gelagert. Die Oberflächengeschwindigkeit der Probe wird auf der Platten-Rückseite von einem VISAR-Laser (Velocity interferometer system for any reflector) nach Barker und Hollenbach [12] vermessen. Aus dem aufgezeichneten Geschwindigkeitsverlauf kann unter Variation der Impaktgeschwindigkeit ein Zusammenhang zwischen Wellengeschwindigkeit U_s und Partikelgeschwindigkeit U_p ermittelt werden. Diese Beziehung ergibt schließlich die Funktion des Drucks abhängig von der volumetrischen Dehnung, wie sie in Abschnitt 2.1.2 diskutiert wird. Ergebniskurven eines PPI-Tests werden anhand einer Simulation im Abschnitt 4.4 gezeigt und diskutiert.

Anhand dieser beiden Konfigurationen, dem uniaxialen Spannungszustand sowie dem uniaxialen Dehnungszustand, wird das Werkstoffverhalten in den nächsten Abschnitten vergleichend diskutiert.

2.1.1 Uniaxialer Spannungszustand

Für einen Werkstoff unter uniaxialer Spannung lässt sich der Spannungstensor schreiben als

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{uniax}} = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

und der zugehörige Verzerrungstensor ergibt sich analog zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_l & 0 & 0 \\ & \varepsilon_q & 0 \\ \text{sym.} & & \varepsilon_q \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Darin kennzeichnet der Index l eine in Richtung der Belastung orientierte Größe (Längsrichtung), während ein Index q eine Größe quer dazu kennzeichnet (Querrichtung). Die Tensoren sind ausschließlich auf der Hauptdiagonalen besetzt.

Unter Anwendung des Hooke'schen Gesetzes und der Annahme eines isotropen, richtungsunabhängigen, linear elastischen Werkstoffs können die Bedingungen für einzelnen Fälle klar formuliert werden.

Im Falle eines uniaxialen Zugversuchs wird eine äußere, globale Verschiebung aufgebracht, die dominant zu einer Dehnung in Längsrichtung führt. Quer dazu stellen sich Dehnungen entsprechend der Querkontraktionszahl des Werkstoffs ein. Die freien Ränder lassen dies zu. Dabei muss für den elastischen und den plastischen Anteil jeweils eine eigene Querkontraktionszahl vorausgesetzt werden. Damit lassen sich die Spannung in Hauptbelastungsrichtung sowie die Dehnungen errechnen aus

$$\sigma_l = E \varepsilon_l = 3K(1 - 2\nu)\varepsilon_l \quad (2.30)$$

und

$$\dot{\varepsilon}_q = -\nu \dot{\varepsilon}_l. \quad (2.31)$$

Die Zerlegung des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in einen elastischen und einen plastischen Anteil gemäß Gleichung (2.22) führt zu

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_l & 0 & 0 \\ & \dot{\varepsilon}_q & 0 \\ \text{sym.} & & \dot{\varepsilon}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}^e & 0 & 0 \\ & -\nu \dot{\varepsilon}^e & 0 \\ \text{sym.} & & -\nu \dot{\varepsilon}^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}^p & 0 & 0 \\ & -\nu^p \dot{\varepsilon}^p & 0 \\ \text{sym.} & & -\nu^p \dot{\varepsilon}^p \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Für den elastischen Anteil kann wiederum eine Zerlegung in den deviatorischen und den hydrostatischen Anteil erfolgen gemäß

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^e & 0 & 0 \\ -\nu \dot{\epsilon}^e & 0 & 0 \\ \text{sym.} & -\nu \dot{\epsilon}^e & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_l^e & 0 & 0 \\ -\nu \dot{\epsilon}_l^e & 0 & 0 \\ \text{sym.} & -\nu \dot{\epsilon}_l^e & \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_v^e & 0 & 0 \\ \dot{\epsilon}_v^e & 0 & 0 \\ \text{sym.} & \dot{\epsilon}_v^e & \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Das elastisch volumetrische Dehnungsinkrement $\dot{\epsilon}_v^e$ kann darin errechnet werden aus dem elastischen Dehnungsinkrement $\dot{\epsilon}^e$ und der Querkontraktionszahl ν mit

$$\dot{\epsilon}_v^e = \dot{\epsilon}^e (1 - 2\nu). \quad (2.34)$$

Auch der plastische Anteil kann wiederum zerlegt werden in seinen deviatorischen und volumetrischen Anteil. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^p & 0 & 0 \\ -\nu^p \dot{\epsilon}^p & 0 & 0 \\ \text{sym.} & -\nu^p \dot{\epsilon}^p & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_l^p & 0 & 0 \\ -\nu^p \dot{\epsilon}_l^p & 0 & 0 \\ \text{sym.} & -\nu^p \dot{\epsilon}_l^p & \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_v^p & 0 & 0 \\ \dot{\epsilon}_v^p & 0 & 0 \\ \text{sym.} & \dot{\epsilon}_v^p & \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Darin wird der deviatorische Anteil gesteuert durch die plastische Fließregel.

Für einen plastisch inkompressiblen Werkstoff mit einer plastischen Querkontraktionszahl von $\nu^p = 0.5$ ergibt sich

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}^p (1 - 2\nu^p) \equiv 0, \quad (2.36)$$

die plastisch volumetrischen Dehnungen sind also identisch Null. Damit ist das Druckinkrement eindeutig beschrieben und ausschließlich abhängig von der elastischen Deformation. Die deviatorischen Spannungs- und Druckinkremente errechnen sich schließlich zu

$$\dot{s} = 2G(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (2.37)$$

und

$$\dot{p} = -K\dot{\epsilon}_v^e. \quad (2.38)$$

Bei der Gleichung zur Berechnung eines Drucks aus einer Zustandsvariablen handelt es sich um eine Zustandsgleichung. Im Allgemeinen kann der Zustand eines Werkstoffs an einem Punkt durch zwei voneinander unabhängige Zustandsvariablen eindeutig beschrieben werden. Da die Temperaturabhängigkeit an dieser Stelle nicht betrachtet wird, ist die Zustandsgleichung in unserem Fall nur vom aktuellen Volumen abhängig. Die Zustandsgleichung im uniaxialen Spannungszustand entspricht Gleichung (2.38). Es handelt sich um eine lineare Zustandsgleichung. Der Druck im Werkstoff verhält sich also linear gegenüber

einer Änderung des Volumens. Auf eine Kompression reagiert der Werkstoff entsprechend seinem Kompressionsmodul K .

Unter dem Einfluss großer Deformationen verhalten sich viele Werkstoffe plastisch. Plastisches Verhalten ist gekennzeichnet durch eine bleibende Deformation nach Entlastung des Werkstoffs. Beispiele für Werkstoffe mit plastischem Verhalten sind Metalle und thermoplastische Kunststoffe. Charakterisiert wird die Plastizität mit Hilfe der Fließgrenze sowie eines Verfestigungsansatzes. Ein oft verwendeter und von Reithofer [127] implementierter und weiter entwickelter Ansatz ist der Ansatz nach Schmachtenberg [141] (siehe auch Oswald et al. [115]):

$$\sigma^p(\varepsilon^p) = \sigma_y \varepsilon^p \left(1 + \frac{E_T \varepsilon^p}{E}\right) \left(1 + \frac{E \varepsilon^p}{H}\right)^{-1}. \quad (2.39)$$

Dieser beschreibt die Fließspannung σ^p abhängig von der plastischen Dehnung ε^p . Eine Modellierung an das ermittelte Werkstoffverhalten erfolgt mit Hilfe von drei Parametern: der Fließgrenze σ_y , dem Tangentenmodul E_T sowie dem Schmachtenberg- H .

Beobachtet man im Versuch ein zeitabhängiges Fließen des Werkstoffs, so sind in der Literatur zahlreiche visko-plastische Ansätze wie z.B. nach Cowper und Symonds [38] zu finden. Die Beschreibung der Verfestigungskurve wird mit einem Ansatz zur Beschreibung der Dehnratenabhängigkeit ergänzt. In Kombination mit beiden Ansätzen kann das plastische Verhalten von Werkstoffen unter quasistatischer und dynamischer Last hinreichend abgebildet werden. Im Fall einer elastisch-visko-plastischen Formulierung wird die Spannungserhöhung durch die Vorgabe eines dehnratenabhängigen Verfestigungsansatzes erreicht. In der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz nach Johnson und Cook [81], [82] zur Beschreibung der Dehnratenabhängigkeit gewählt. Dieser lautet

$$\sigma(\dot{\varepsilon}) = \sigma^p \left[1 + \frac{1}{v_{JC}} \log \left(\frac{\max(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \quad (2.40)$$

und skaliert die Spannung σ^p abhängig von der Dehnrate $\dot{\varepsilon}$. Dabei kann entweder die Gesamtdehnrate oder die plastische Dehnrate gewählt werden. Zur Modellierung stehen zwei Parameter zur Verfügung, der Viskositätsparameter v_{JC} sowie die Bezugsdehnrate $\dot{\varepsilon}_0$.

Der nach Reithofer modifizierte Schmachtenberg-Ansatz sowie der Johnson-Cook-Ansatz werden multiplikativ verknüpft.

Die im uniaxialen Zugversuch ermittelte Gesamtdehnung ε kann unter Anwendung der Beziehung

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.41)$$

in die plastische Dehnung ε^p umgerechnet werden. Darin entspricht E dem Elastizitätsmodul sowie σ_y der Fließgrenze für plastisches Fließen. Für den Ansatz wird von einem linearen elastischen Anstieg sowie von einer eindeutigen Fließgrenze ausgegangen. Liegt dies im Versuch nicht vor, so kann damit in der Praxis trotzdem eine genäherte plastische Dehnung ermittelt werden. Somit kann das Verformungsverhalten ausreichend gut abgebildet werden, das Rückverformungsverhalten wird nur näherungsweise beschrieben.

Für Schädigung und Versagen von Werkstoffen finden sich in der Literatur zahlreiche Ansätze. Darin werden die charakteristischen Werkstoffeigenschaften berücksichtigt. Einfache Versagenskriterien beziehen sich auf einzelne Größen wie eine maximale Spannung oder eine maximale Dehnung. Damit kann Werkstoffverhalten in manchen Fällen ausreichend gut beschrieben werden. Meist ist das Werkstoffverhalten aber komplexer, sodass eine Kombination mehrerer Kriterien unter Einbeziehung verschiedener Größen notwendig wird. Für homogene, isotrope Werkstoffe schlägt Gurson [69] einen Ansatz vor. Diesem Ansatz liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich durch eine Belastung Poren im Werkstoff bilden, welche die Festigkeit reduzieren und dadurch als Schädigung bezeichnet werden können. Ist ein kritischer Schädigungswert erreicht, versagt der Werkstoff.

Der Ansatz nach Gurson berücksichtigt nicht die Dehnrage oder die Temperatur. Um die Schädigungsevolution besser zu beschreiben, stellen Neukamm et al. [111] - [112] und Ebelshaiser et al. [54] das GISSMO-Modell vor. Dabei handelt es sich um ein verallgemeinertes, inkrementelles, spannungszustandsabhängiges Schädigungsmodell (Generalized Incremental Stress-State dependent damage Model = GISSMO). Dieses wird auch von Mattiasson et al. [95] beschrieben.

Für die Schädigung wird der Schädigungsparameter D mit

$$D = \left(\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_f^p} \right)^n \quad (2.42)$$

eingeführt. Darin sind ε^p die plastische Dehnung und ε_f^p die plastische Dehnung zum Zeitpunkt des Versagens sowie n der Schädigungsexponent mit $\varepsilon^p \leq \varepsilon_f^p$.

Die Schädigung nimmt automatisch mit der plastischen Dehnung zu und hat zum Zeitpunkt des Erreichens der plastischen Versagensdehnung den Wert 1. Die Form der Funktion bestimmt der Schädigungsexponent n .

Der Schädigungsparameter D wird durch die Gleichung

$$\bar{\sigma} = \sigma \left[1 - \left(\frac{D - D_{\text{crit}}}{1 - D_{\text{crit}}} \right)^m \right] \quad (2.43)$$

mit der Spannung verknüpft. Darin ist D_{crit} die kritische Schädigung, ab welcher die Spannung reduziert wird. Der Form-Parameter m steuert den Grad der Spannungsreduzierung

(fading). Bei einem Schädigungswert von $D = 1$ besitzt die Spannung den Wert 0, der Werkstoff kann dann keine Belastung mehr aufnehmen.

Das GISSMO Modell erlaubt es ferner, die Parameter ε_f^p , n und m sowie D_{crit} abhängig von der Mehrachsigkeit und der Dehnrates zu definieren. Dadurch entsteht ein sehr universelles Schädigungsmodell.

2.1.2 Uniaxialer Dehnungszustand

Zur Diskussion des uniaxialen Dehnungszustands können der Spannungs- und Verzerrungstensor wie folgt formuliert werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 & 0 \\ & \sigma_q & 0 \\ \text{sym.} & & \sigma_q \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{uniax}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_l & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Unter Aufbringung einer Längsdehnung ε_l und der Annahme des Hooke'schen Gesetzes bei Vorliegen eines isotropen, linear elastischen Werkstoffs ergeben sich die Spannungen in Längsrichtung zu

$$\sigma_l = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)} \varepsilon_l = \left(K + \frac{4}{3}G \right) \varepsilon_l \quad (2.46)$$

sowie in Querrichtung zu

$$\sigma_q = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_l. \quad (2.47)$$

Es ist erkennbar, dass sich unter uniaxialem Dehnungszustand eine deutlich größere Grundsteifigkeit des Werkstoffs zeigt. Für Metalle liegt die Grundsteifigkeit etwa 40% oberhalb des Elastizitätsmoduls.

Die Zerlegung des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{uniax}}$ in elastischen sowie plastischen Anteil, und diese jeweils wiederum in deviatorischen sowie volumetrischen Anteil gemäß Gleichung (2.22) kann hier in gleicher Weise erfolgen, wie für den uniaxialen Spannungszustand. Ausgehend von einem elastisch-plastischen Werkstoff beträgt die Steigung des elastischen deviatorischen Anteils im Spannungs-Dehnungs-Diagramm $4/3G$ während die Steigung des elastischen hydrostatischen Anteils K beträgt. Damit summiert sich die Steigung im

Bereich der elastischen Deformation auf $K + 4/3G$. Dies ist für den Fall der linearen Zustandsgleichung gültig. Wird eine nichtlineare Zustandsgleichung verwendet, tritt diese an die Stelle des Kompressionsmoduls K .

Der plastisch deviatorische Anteil wird durch die Verfestigung gesteuert, während der plastisch volumetrische Anteil für plastisch inkompressible Werkstoffe identisch Null ist.

Im uniaxialen Dehnungszustand ergibt sich eine Proportionalität zwischen plastischer Dehnung und Gesamtdehnung zu

$$\varepsilon^p = \frac{2}{3} \varepsilon_l. \quad (2.48)$$

Im uniaxialen Dehnungszustand entspricht die plastische Dehnung folglich immer $2/3$ der Gesamtdehnung. Es handelt sich dabei um rein deviatorische Dehnungsanteile.

Die Gleichungen wie zuvor beschrieben verwenden ein Dehnungsinkrement und damit eine zeitabhängige Größe. Eine Belastung durch eine höhere Dehnrate führt somit zu einer Spannungserhöhung und einer steiferen Materialantwort. Gleichung (2.27) zur Integration des Druckinkrements gilt für den uniaxialen Dehnungszustand äquivalent.

2.1.3 Nichtlineare Zustandsgleichung für Feststoffe

Unter hohem Druck verhalten sich die meisten Werkstoffe nicht mehr linear. Die im uniaxialen Spannungszustand unter geringem Druckeinfluss ermittelte lineare Abhängigkeit des Drucks von der volumetrischen Dehnung ist dann nicht mehr gültig. Stattdessen wird für die Berechnung des Druckes eine nichtlineare Beziehung angegeben.

In einer Zustandsgleichung wird der volumetrische Parameter μ verwendet. Dieser ist der Kehrwert des relativen Volumens J abzüglich eins. Das relative Volumen J ist definiert als

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (2.49)$$

Darin sind V das aktuelle Volumen und ρ die aktuelle Dichte. Konstante Anfangswerte sind mit einem Index Null gekennzeichnet. Ohne Belastung hat das relative Volumen den Wert eins und läuft gegen Null für steigende Kompression. Verständlicher ist ein Parameter, der im Ausgangszustand den Wert Null aufweist und mit steigender Last ebenfalls größer wird. Dies erfüllt der volumetrische Parameter μ durch die Beziehung

$$\mu = \frac{1}{J} - 1 = \frac{\rho}{\rho_0} - 1. \quad (2.50)$$

Die volumetrische Dehnung errechnet sich schließlich mit

$$\varepsilon_v = J - 1 = \frac{\mu}{\mu + 1} \quad (2.51)$$

aus dem relativen Volumen. Die volumetrische Dehnung hat einen Wert von Null für den unbelasteten Zustand und wird kleiner unter Druckeinfluss.

Zur Beschreibung der Beziehung zwischen Druck und Volumen hat Grüneisen [65], [67] (siehe auch Halquist [71]) eine Gleichung entwickelt, deren Parameter den Werkstoff unter hoher volumetrischer Belastung beschreiben. Der Ansatz von Grüneisen für einen Werkstoff unter Druckbelastung lautet

$$p(\mu) = \frac{\rho_0 C^2 \mu \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \mu - \frac{a}{2} \mu^2 \right]}{\left[1 - (S_1 - 1) \mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} + (\gamma_0 + a\mu) e, \quad (2.52)$$

während ein Werkstoff unter Zugbelastung mit der Gleichung

$$p(\mu) = \rho_0 C^2 \mu + (\gamma_0 + a\mu) e \quad (2.53)$$

beschrieben wird.

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare Zustandsgleichung (equation of state, EOS). Die initiale Dichte ρ_0 ergibt sich dabei aus dem Datenblatt oder eigenen Messungen. Bei dem Parameter C handelt es sich um die aktuelle Wellengeschwindigkeit im Werkstoff unter Belastung. Die Parameter S_1 , S_2 und S_3 sind Formfaktoren und dienen der Beschreibung der Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit U_s von der Partikelgeschwindigkeit U_p aus dem Planar-Platten-Impakt-Test. Dieser wird in Abschnitt 2.1 näher beschrieben. Liegt eine lineare Beziehung vor, werden die Parameter S_2 und S_3 zu Null gesetzt. Der Parameter a ist ein Korrekturfaktor zum Grüneisen-Gamma γ_0 . Die Temperatur korreliert mit der Energie e .

Das Grüneisen-Gamma kennzeichnet die Druckabhängigkeit der Frequenz von Gitterschwingungen in kristallinen Werkstoffen und kann entsprechen der Beziehung

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0 K}{c_v \rho} \quad (2.54)$$

ermittelt werden. Darin sind der volumetrische Ausdehnungskoeffizient α_v , der Kompressionsmodul K , die Wärmekapazität c_v unter konstantem Volumen sowie die aktuelle Dichte ρ des Werkstoffs enthalten. Burakovsky et al. [28] entwickelten ein analytisches Modell zur Ermittlung des Grüneisen-Gammas für sämtliche chemische Elemente verschiedener Dichten. Prakash et al. [122] untersuchten das Grüneisen-Gamma für Aluminium. Siehe auch Voadlo et al. [160].

Zur Ermittlung der Parameter für eine Grüneisen-Zustandsgleichung eignet sich der Planar-Platten Impact Test, wie er in Abschnitt 2.1 vorgestellt wurde.

In einem Versuch unter uniaxialem Spannungszustand werden niemals ausreichend hohe Drücke erreicht, um den nichtlinearen Charakter der Zustandsgleichung zu erkennen. Dort sind die Bauteilränder frei und können sich entsprechend der Querkontraktion lateral spannungsfrei verschieben. Besitzt ein Werkstoff die Eigenschaft der plastischen Inkompressibilität nicht, so wird die plastische Komprimierbarkeit als Volumenreserve aktiviert, bevor eine elastisch, volumetrische Komprimierung auftritt. Auch dann kann der nichtlineare Charakter der Zustandsgleichung nicht gemessen werden.

Die Spannung unter uniaxialem Zug kann mit Hilfe des Elastizitätsmoduls E sowie der aufgebrachten Längsdehnung ε_l mit der Gleichung

$$\sigma_l = E \varepsilon_l \quad (2.55)$$

ermittelt werden.

Stellt man dieser Gleichung die Beziehungen unter uniaxialer Dehnung gegenüber, so ergibt sich für die Spannung in Längsrichtung die Gleichung

$$\sigma_l = \left(K + \frac{4}{3} G \right) \varepsilon_l. \quad (2.56)$$

Da der Rand des Versuchsmusters fest eingespannt ist oder sich lateral weit entfernt befindet, existiert eine zweite Spannungskomponente quer zur Belastungsrichtung, die mit der Gleichung

$$\sigma_q = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon_l \quad (2.57)$$

beschrieben werden kann.

Es ist erkennbar, dass die Komponenten der Spannung im uniaxialen Dehnungszustand bei gleicher Längsdehnung deutlich größer sind, als dies im uniaxialen Spannungszustand der Fall ist.

Die Vergleichsspannung nach von Mises lässt sich mit diesen beiden Komponenten bilden zu

$$\sigma_{\text{VM}} = \sigma_y = \sigma_l - \sigma_q = 2G\varepsilon_l. \quad (2.58)$$

Dies entspricht der Spannung am Punkt des plastischen Fließens σ_y . Der Fließpunkt unter uniaxialem Dehnungszustand wird Hugoniot-Elastic-Limit (HEL) genannt. Er kann durch Einsetzen der vorhergehenden Gleichungen ermittelt werden zu

$$\sigma_{\text{HEL}} = \left(\frac{K + \frac{4}{3}G}{2G} \right) \sigma_y. \quad (2.59)$$

Darin sind σ_y der Fließpunkt unter uniaxialem Spannungszustand sowie K und G der Kompressions- und Schubmodul.

Wird nun die Oberflächengeschwindigkeit im Planar-Platten-Impakt-Test gemessen, so kann der HEL-Fließpunkt mit Hilfe der Gleichung

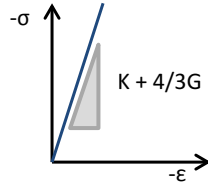
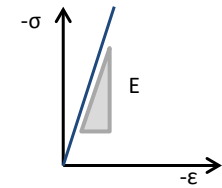
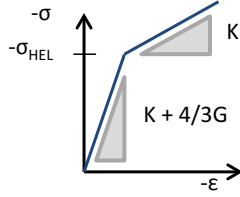
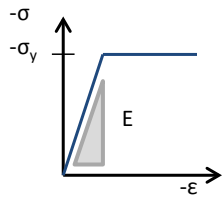
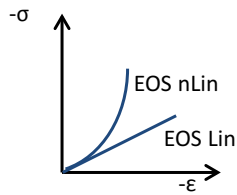
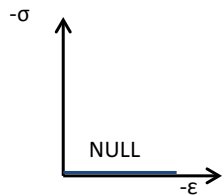
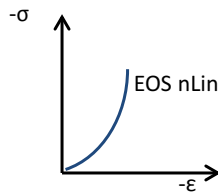
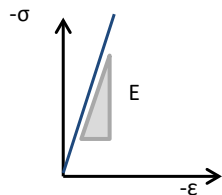
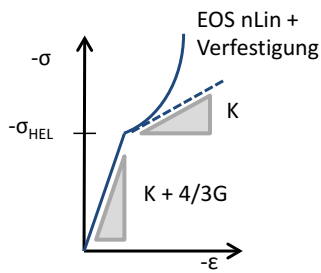
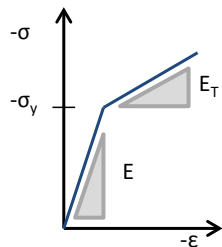
$$\sigma_{\text{HEL}} = \frac{1}{2} \rho_0 C_{3D} v_{\text{HEL}} \quad (2.60)$$

ermittelt werden. Darin ist C_{3D} die 3D-Wellengeschwindigkeit gemäß Gleichung (2.64).

Der Werkstoff stellt einer Deformation bis zum Erreichen des HEL sowohl seinen Kompressionsmodul als auch seinen Schubmodul als Widerstand entgegen. Dies wird deutlich, betrachtet man die deviatorischen und die hydrostatischen Anteile der Belastung. Der deviatorische Anteil steigt mit einer Steigung von $4/3G$ während der hydrostatische Anteil eine Steigung von K aufweist. Belastet man den Werkstoff über den Spannungswert des HEL hinaus, nimmt der Einfluss des Schubmoduls ab und es existiert kein Schubwiderstand. An der Stelle des HEL ändert sich das Werkstoffverhalten plötzlich.

In Abbildung 2.2 sind die einzelnen Fälle anschaulich gegenüber gestellt.

Ab dem Zeitpunkt, in dem die Belastung den HEL überschreitet, wird der Schubwiderstand des Werkstoffs aufgegeben. Im Fall von plastisch inkompressiblen Werkstoffen besteht plastisches Fließen nur aus den deviatorisch plastischen Anteilen $\dot{\epsilon}^p$. Die Dichte unter hohem Druck nimmt zu. Die Steifigkeit nimmt entsprechend dem nichtlinearen Verhalten überproportional zu, der Werkstoff wird also steifer. Damit werden Wellen beschleunigt. Es kann sich eine Stoßwelle aufstellen. Dabei bilden sich zwei Wellenfronten, der elastische Vorläufer und der plastische Nachläufer. Auf die Welleneffekte wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen.

**UNIAXIALER
SPANNUNGSZUSTAND****UNIAXIALER
DEHNUNGSZUSTAND****LINEAR ELASTISCH** ρ, E, ν, C_e **LINEAR ELASTISCH
PERFEKT PLASTISCH** $\rho, E, \nu, \sigma_y, E_T = 0, C_e, C_p$ **HYDROSTATISCH** $G = 0$ ρ, C_e **LINEAR ELASTISCH
EOS NICHTLINEAR** $\rho, E, \nu, \sigma_y, E_T, C_e$ **LINEAR ELASTISCH
PLASTISCHE VERFESTIGUNG
EOS NICHTLINEAR** $\rho, E, \nu, \sigma_y, E_T, C_e, C_p$ **Abbildung 2.2** Vergleich der Spannungsantwort unter Belastung im Uniaxialen Spannungszustand und im Uniaxialen Dehnungszustand.

2.2 Wellenausbreitung und Stoßwellen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Wellenausbreitung in Festkörpern. Wellen können mit Hilfe der Wellengleichung

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.61)$$

beschrieben werden. Darin sind x der Ort sowie t die Zeit. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Wellengleichung kann mit einem Ansatz nach d'Alembert gelöst werden. Dieser lautet

$$H(x,t) = f(x+Ct) + g(x-Ct). \quad (2.62)$$

Die Wellengeschwindigkeit C im Festkörper ist abhängig von der geometrischen Ausdehnung des Bauteils, den Randbedingungen und dem Werkstoffverhalten. Für den eindimensionalen Fall ergibt sich die Wellengeschwindigkeit zu

$$C_{1D} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.63)$$

und für den dreidimensionalen Fall zu

$$C_{3D} = \sqrt{\frac{K(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (2.64)$$

mit $K = f(\rho^2)$.

Bei der Untersuchung von Wellen in Festkörpern unterscheidet man grundsätzlich zwei Fälle: akustische Wellen breiten sich in einem Festkörper aus und verändern dabei ihre Form nicht. Das heißt, an jedem Ort des Körpers kann die identische Wellenform gemessen werden. Mit Hilfe der Wellengleichung kann analytisch eine akustische Welle beschrieben werden. Shock- bzw. Stoßwellen breiten sich in einem Festkörper aus, jedoch verändern sie ihre Form. Vergleicht man die an zwei verschiedenen Orten gemessene Welle, stellt man Unterschiede fest.

Phänomenologisch ist eine Stoßwelle gekennzeichnet durch einen Sprung, also einer Inkontinuität in den Zustandsgrößen. In Abbildung 2.3 wird dies gezeigt. Dort ist ein horizontal ausgedehnter Stab dargestellt, der von links nach rechts von einer Stoßwelle durchlaufen wird. Die initialen Zustandsgrößen sind rechts erkennbar und mit einem Index Null gekennzeichnet. Die Zustandsgrößen nach dem Stoß sind links mit dem Index eins gekennzeichnet.

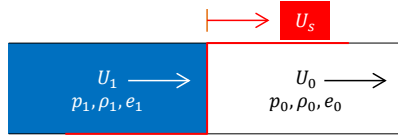


Abbildung 2.3 Zustandsgrößen vor und nach einer Stoßwelle und Stoßwellengeschwindigkeit.

Der Vorgang kann durch bilden von Erhaltungsgleichungen bezüglich Masse, Moment und Energie beschrieben werden. Dies führt zu den Rankine Hugoniot Gleichungen. Für die Massenerhaltung gilt:

$$\rho_0(U_s - U_0) = \rho_1(U_s - U_1). \quad (2.65)$$

Darin sind ρ_i die Dichte des Werkstoffs vor und nach dem Stoß, ebenso die Geschwindigkeiten U_i vor und nach dem Stoß sowie U_s die Stoßfrontgeschwindigkeit. Für die Impulserhaltung gilt:

$$\rho_1(U_s - U_1)U_1 = p_1 - p_0 \quad (2.66)$$

mit dem Druck p_i vor und nach dem Stoß. Für die Energieerhaltung gilt:

$$p_1 U_1 = e_1 \rho_1 (U_s - U_1) - e_0 \rho_0 U_s + 0.5 \rho_1 (U_s - U_1) U_1^2 \quad (2.67)$$

mit der Energie e_i vor und nach dem Stoß.

Betrachtet man die Gleichungen genauer, fällt auf, dass zur eindeutigen Beschreibung eines Werkstoffverhaltens die Beziehung $U_s - U_1$ bekannt sein muss. Im Planar-Platten-Impakt-Test, wie er in Abschnitt 2.1 beschrieben wird, wird die Beziehung $U_s - U_p$ direkt durch Variation der Impaktgeschwindigkeit ermittelt und anhand des Ansatzes nach Hugoniot abgebildet. Die Shock Hugoniot Gleichung lautet

$$U_s = C_0 + S_1 U_p = C_0 + S_1 U_1. \quad (2.68)$$

Darin sind U_p die im Versuch gemessene Oberflächengeschwindigkeit, welche identisch mit U_1 ist, U_s die im Versuch ermittelte Stoßwellengeschwindigkeit und S_1 ein Formparameter zur Beschreibung der Abhängigkeit. Im vorliegenden Fall wird von einem linearen Zusammenhang ausgegangen. Der Parameter C_0 entspricht der Wellengeschwindigkeit bei einer Partikelgeschwindigkeit von Null und damit dem Achsenabschnitt des $U_s - U_p$ -Diagramms.

Der Shockzustand des Werkstoffs wird über die Rayleigh Linie gemäß

$$p_2 - p_1 = U_s^2 \left(\rho_1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \right) \quad (2.69)$$

beschrieben.

Die Effekte werden im folgenden graphisch anhand von Abbildung 2.4 diskutiert. Dort werden verschiedene Belastungszustände dargestellt. Die Wellenformen zu diesen Belastungszuständen werden für zwei Orte einzeln gezeigt.

Ausgangspunkt ist ein lateral fest eingespannter Stab, der mit einem Druckimpuls belastet wird. Es soll sich um ein elastisch-plastisches Material handeln. Die Spannung bleibt weiter unter dem HEL, so dass eine Nichtlinearität irrelevant ist. Dies entspricht dem Zustand A in Abbildung 2.4. Das Material reagiert an der Lasteinleitungsstelle mit einem linearen Anstieg auf den Druckanstieg und mit einem linearen Abfall auf die Entlastung. Diese Belastungshistorie breitet sich im Stab aus. An allen anderen Orten des Stabes ist diese Belastung in gleicher Form messbar. Es handelt sich um eine akustische Welle.

Wird der Stab über das HEL hinaus belastet, so entspricht dies dem Zustand B. Der Werkstoff zeigt am Ort der Lasteinleitung die Lasteinleitungshistorie. Dann bildet sich eine Welle, die in den Stab hinein läuft. Diese besteht aus einem elastisch induzierten und einem plastisch induzierten Anteil. Der elastisch induzierte Anteil breitet sich mit einer hohen Geschwindigkeit im Stab aus, da die elastische Steifigkeit sehr groß ist. Der plastisch induzierte Anteil der Welle breitet sich mit einer geringeren Geschwindigkeit aus, da der Sprung über dem HEL eine geringe Steigung und damit eine geringere Steifigkeit aufweist als die elastische Steifigkeit. Der elastische Vorläufer stellt sich zu einer Stoßwelle auf, da sich der Werkstoff bis zum HEL signifikant nichtlinear verhält. Der plastische Anteil stellt sich ebenfalls zu einer Stoßwelle auf. Diese ist aber langsamer als der elastische Vorläufer. Auf der Zeitachse bildet sich eine Stufe, die beiden Wellenanteile kommen an einem Ort des Stabes zu unterschiedlichen Zeiten an. Je weiter sich die Welle von dem Ort der Lasteinleitung entfernt, umso größer wird die zeitliche Separierung der Anstiege.

Die Belastung kann nun weiter gesteigert werden. Den Grenzfall, dass der Sprung oberhalb des HEL genau die gleiche Steigung aufweist wie unterhalb des HEL zeigt der Fall C. Dort sind der elastisch und der plastisch induzierte Anteil der Stoßwelle gleich schnell. Es bildet sich keine Stufe aus. Dies gilt auch für eine weiter gesteigerte Belastung, den Fall D zeigt. In diesem Fall spricht man von „strong shocks“.

Wird der Stab mit einem Werkstoff versehen, der keine Schubsteifigkeit ausweist, sondern direkt entsprechend einer nichtlinearen Zustandsgleichung auf eine Komprimierung reagiert, verhält er sich wie in Fall E gezeigt. Hier bildet sich bereits unter einer geringen Belastung eine elastische Stoßwelle. Eine Fließgrenze und damit ein HEL sowie eine

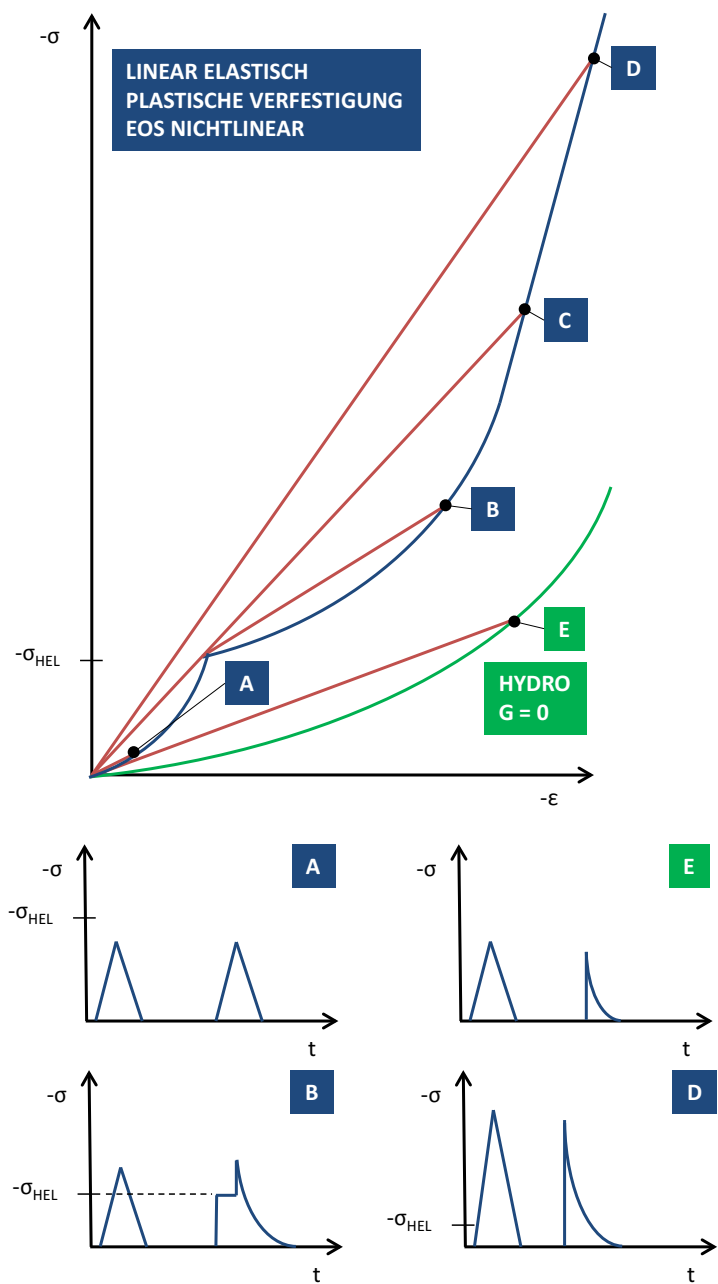


Abbildung 2.4 Wandlung einer akustischen Welle zu einer plastischen Stoßwelle.

plastische Verfestigung existieren nicht. Dies entspricht dem Verhalten von Gasen und Flüssigkeiten.

Eine ähnliche analytische und numerische Untersuchung hat Maurer [96] gezeigt. Dabei geht er zusätzlich auf den Temperaturanstieg bei einer Stoßwellenausbreitung ein.

Trifft eine Welle in Festkörpern auf eine Grenzfläche, so wird ein Teil der Welle reflektiert und der andere Teil transmittiert. Dabei ist entscheidend, wie die Randbedingung an der Grenzfläche aussieht. Im allgemeinen Fall geht man von einem Übergang von dem einen Werkstoff in einen anderen Werkstoff aus. Zur korrekten Beschreibung der Effekte ist es notwendig, die mechanische Impedanz Z_i der einzelnen Werkstoffe i , die miteinander in Kontakt sind, zu bestimmen mit

$$Z_i = \rho_i C_i. \quad (2.70)$$

Darin sind ρ_i die Dichte des einzelnen Werkstoffs i sowie C_i die Wellengeschwindigkeit.

Die transmittierte, also auf den zweiten Werkstoff übertragene Spannung σ_T in Abhängigkeit von der eingeleiteten Spannung σ_I berechnet sich zu

$$\sigma_T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \sigma_I. \quad (2.71)$$

Die im ersten Werkstoff reflektierte Spannung σ_R ergibt sich abhängig von der eingeleiteten Spannung σ_I zu

$$\sigma_R = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \sigma_I. \quad (2.72)$$

Für den Sonderfall, dass beide Kontaktwerkstoffe aus dem gleichen Werkstoff bestehen, gilt für die Impedanzen die Bedingung $Z_1 = Z_2$. Für ein offenes Ende des Bauteils, an dem die Welle reflektiert wird, kann von Luft mit einer Impedanz von $Z_2 = 0$ ausgegangen werden. Eine Starre Wand am Ende des Bauteils schließlich bedeutet eine Impedanz von $Z_2 \rightarrow \infty$.

Bezüglich einer Reflektion von Stoßwellen unter Berücksichtigung des elastischen Vorläufers und einer plastischen Stoßfront sei auf Davison [40] verwiesen.

Es sei an dieser Stelle ergänzend darauf hingewiesen, dass es Stoßwellen nur unter Druckbelastung geben kann. Denn nur unter Druck nimmt die Dichte des Werkstoffs zu, was zu einer höheren Wellengeschwindigkeit und damit zu einem Aufstellen der Welle führt. Unter Zug tritt der gegenteilige Effekt auf: die Dichte in der Welle nimmt ab, somit wird die hintere Flanke der Welle langsamer und die Welle insgesamt zerläuft. Siehe dazu auch Cooper [37].

Werkstoffe, die keine plastische Inkompressibilität aufweisen, absorbieren Stoßwellen. Eine eingeleitete elastische Welle stellt sich nicht auf und eine eingeleitete Stoßwelle wird von der plastischen Kompressibilität als Volumenreserve dissipiert. Siehe dazu auch Carlucci [29] und Kanel [84].

Bezüglich der Stoßwellenausbreitung in zellularen, schaumartigen Werkstoffen sei auf Zheng et al. [168] verwiesen. Siehe dazu auch Liu et al. [89] sowie Cohen und Durban [35]. Liu et al. [90] sowie Shepherd et al. [146] haben die Ausbreitung von Stoßwellen in viskoelastischen Medien untersucht.

Die Stoßwellenausbreitung in schichtweise aufgebauten Laminaten bestehend aus Stahl und Polycarbonat haben Molinari und Ravichandran [104], [124] untersucht. Darin wurde ein ähnlicher Aufbau wie in der vorliegenden Arbeit umgesetzt.

2.3 Faserverbundwerkstoffe

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die ballistischen Eigenschaften von Faserverbundwerkstoffen untersucht. Um solche orthotrope, inhomogene Werkstoffe zu beschreiben, können der Literatur zahlreiche Ansätze zur Homogenisierung der Werkstoffe entnommen werden. Der Aufbau eines Faserverbundwerkstoffs besteht aus einer Matrix, die mit Fasern gefüllt wird. Der volumenbezogene Faseranteil f errechnet sich aus den Volumenanteilen der Faser V_f und der Matrix V_m :

$$f = \frac{V_f}{V_f + V_m}. \quad (2.73)$$

Voigt [161] gibt die Gesamtelastizität für den Verbundwerkstoff phänomenologisch wie folgt an:

$$E_c = fE_f + (1 - f)E_m. \quad (2.74)$$

Der Parameter E_f ist dabei die Elastizität der Faser, E_m ist die Elastizität des Matrixwerkstoffs. E_c ist die Gesamtelastizität des Werkstoffs in Richtung der Fasern für den Fall, dass im Verbundwerkstoff alle Fasern parallel zueinander orientiert sind.

Die Gesamtelastizität des Verbundwerkstoffs rechtwinklig zu seinen perfekt orientierten Fasern gibt Reuss [128] an mit

$$E_c = \left(\frac{f}{E_f} + \frac{1-f}{E_m} \right)^{-1}. \quad (2.75)$$

Ein Faserverbundwerkstoff, in dem eine statistische Faserverteilung vorliegt, besitzt eine Gesamtelastizität, welche zwischen beiden Ansätzen liegt. Dabei bildet Voigt die obere Grenze, während Reuss die untere Grenze darstellt.

Als Vereinfachung für einen Faserverbundwerkstoff mit einem hohen Faseranteil kann eine einzelne Faser im Matrixwerkstoff betrachtet werden. Dies ermöglicht eine analytische Formulierung der Eigenschaften des Verbundes. Eshelby [55] hat diese analytische Lösung zur Beschreibung eines elliptischen Einschlusses in einem unendlich ausgedehnten Medium entwickelt. Dieser Ansatz wurde von Mori und Tanaka [105] aufgegriffen, und zu einem Ansatz entwickelt, welcher zusätzlich eine Wechselwirkung von Defekten untereinander berücksichtigt, unabhängig von deren Konzentration. Damit ist eine näherungsweise Beschreibung von Faserverbundwerkstoffen analytisch möglich. Die mikromechanischen Grundlagen können z.B. aus Gross und Seelig [66] entnommen werden.

Werden unidirektional orientiert Einzelschichten gestapelt, können diese Schichtaufbauten mit Hilfe der Laminattheorie beschrieben werden. Die Laminattheorie ist ein Formalismus, der die Anordnung von beliebig orientierten Schichten übereinander ermöglicht und daraus die Gesamtsteifigkeit des Verbundes ermittelt. Unter Verwendung dieser richtungsabhängigen Steifigkeiten können dann Spannungen, Kräfte und Momente errechnet werden. Die Besonderheit der Laminattheorie im Vergleich zu einer Platten- oder Scheibentheorie stellt die Berücksichtigung von Koppelsteifigkeiten dar. Durch diese ist eine Beschreibung von Verdrillungen ausgelöst von Normalkräften möglich, siehe Becker [16] und Schürmann [142].

Um einen Verbundwerkstoff unter hohem Druck besser beschreiben zu können, haben Anderson et al. [4] und Vignjevic et al. [159] geeignete Ansätze entwickelt. Anderson geht dabei von einer Plastizität für den Verbundwerkstoff aus und erreicht so eine bessere Beschreibung des Drucks. Vignjevic hingegen sieht keine Plastizität in Verbundwerkstoffen und ermittelt eine allgemeine Formulierung für den Druck, in den auch deviatorische Verzerrungen eingehen.

Zur Beschreibung des Versagens anisotroper, faserverstärkter Werkstoffe sei auf das Tsai-Wu Kriterium [157] sowie die Arbeiten von Puck [123], Cuntze [39] und Pinho [119] verwiesen. All diesen Kriterien ist gemeinsam, dass sie zwischen mehreren Fällen für das Versagen der Matrix sowie der Faser unterschieden und dabei die Belastungsarten Zug, Druck und Schub berücksichtigen.

Zur Berechnung von Bauteilen in hybrider Bauweise
unter ballistischer Beanspruchung

Hybrid structures under ballistic loading

Roth, M.

2017, XVIII, 155 S. 89 Abb., 85 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-54685-7